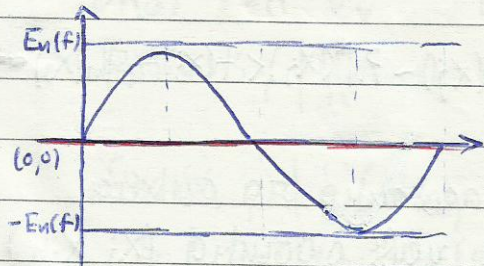


ΜΕΤΙΕΤΟ ΕΦΑΛΜΑ

$$e(x) = f(x) - P_n^*(x)$$

$$E_n(f) = \|f - P_n^*\|$$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί η βοή της $f \in C[a, b]$ στον P_0

Η βέλτιστη σταθερά είναι

$$P_0^* = \frac{1}{2} \left(\max_{x \in [a, b]} f(x) + \min_{x \in [a, b]} f(x) \right)$$

Το μέγιστο απόλυτα σφάλμα ονομάζεται τιμή

$$\begin{aligned} E_1(f) &= \max_{x \in [a, b]} f(x) - \frac{1}{2} \left(\max_{x \in [a, b]} f(x) + \min_{x \in [a, b]} f(x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\max_{x \in [a, b]} f(x) - \min_{x \in [a, b]} f(x) \right) \end{aligned}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο σημείων $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$, λέμε ότι αποτελεί εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για τη συνάρτηση σφάλμα $e = f - P_n^*$ αν $E_n(f) = \|f - P_n^*\| = |f(x_j) - P_n^*(x_j)|$ με $j = 0, 1, \dots, k$ και $f(x_j) - P_n^*(x_j) = - (f(x_{j+1}) - P_n^*(x_{j+1}))$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f \in C[a, b]$. Το πολυώνυμο $P_n^* \in P_n$ είναι η βέλτιστη εφαρμοσμένη προσέγγιση της f στον P_n αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο εναλλασσόμενων σημείων $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ για τη συνάρτηση σφάλμα $e = f - P_n^*$

Αποδ.

($\Rightarrow$) Αρκεί να κατασκευάσουμε (δεν θα γίνει)

($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει το εναλλασ. σύνολο

$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ για την $e = f - P_n^*$.

Υποθέτουμε ότι $q_n \in P_n$ ε/ω $\|f - q_n\| < \|f - P_n^*\| :=$

$= |f(x_j) - P_n^*(x_j)|$. Άρα, το $|f(x_j) - q_n(x_j)| < |f(x_j) - P_n^*(x_j)|$

$\forall j = 0, 1, \dots, n+1$.

• Αν $f(x_j) - P_n^*(x_j) = \|f - P_n^*\|$. Τότε $f(x_j) - q_n(x_j) < f(x_j) - P_n^*(x_j) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_n^*(x_j) - q_n(x_j) < 0$

• Αν $f(x_j) - P_n^*(x_j) = -\|f - P_n^*\|$ τότε $f(x_j) - P_n^*(x_j) < f(x_j) - q_n(x_j) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_n^*(x_j) - q_n(x_j) > 0$

Η συνάρτηση $P_n^* - q_n^* \in P_n$ εναλλάσσει πρόσημο στα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Επομένως, έχει ρίζα σε κάθε διάστημα (x_j, x_{j+1}) $j = 0, 1, \dots, n$. Άρα, έχει $n+1$ ρίζες ($\nless$) άρα είναι στον P_n .

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η β.ο.π της συνάρτησης $\sin(4x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ στον χώρο πολυωνύμων P_6 .

Λύση

Η συνάρτηση $\sin$ δίνει χετικά, ακρότατα

1 και -1 στα σημεία $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Επομένως, για την $\sin(4x)$ θα

$$\text{έχουμε } 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

Στο $[-\pi, \pi]$ τα ακρότατα θα είναι:

για $k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

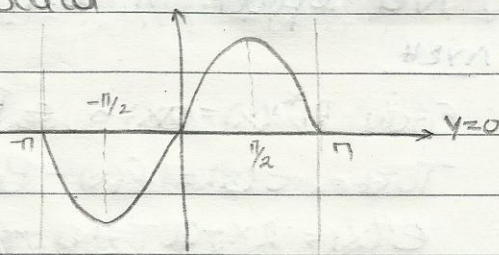
αντίστοιχα

$$\left\{ -\pi + \frac{\pi}{8}, -\pi + \frac{3\pi}{8}, -\pi + \frac{5\pi}{8}, -\pi + \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}$$

Ετσι, η $\sin(4x)$ έχει ένα λ.ο.σ. σωμα από 8 σημεία στο $[-\pi, \pi]$

Επομένως, το $P_6^*(x) = 0$

Αντ. $P_6^* = P_5^* = P_4^* = P_3^* = P_2^* = P_1^* = 0$ (ν. ευθεία $y=0$)



Θεώρημα (Μοναδικότητα)

Η β.ο.π της $f \in C[a, b]$ στον P_n είναι μοναδική

Απόδ.

Εστω υπάρχει ένα άλλη β.ο.π $P \in P_n$ ε/ω

$$\|f - P\| = \|f - P_n^*\| = E_n(f). \text{ Τότε, επειδή το σωμα}$$

των β.ο.π είναι κυρτό στο P_n και $Q = \frac{P + P_n^*}{2}$ θα

είναι β.ο.π. Εστω $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ είναι ένα

εναλλασόμενο σύνολο για την $e(x) = f(x) - Q(x)$. Τότε,

$$\begin{aligned} f(x_j) - Q(x_j) &= f(x_j) - \frac{P(x_j) + P_n^*(x_j)}{2} = \frac{1}{2} (f(x_j) - P(x_j)) + \frac{1}{2} (f(x_j) - P_n^*(x_j)) \\ &= (-1)^{l+j} E_n(f), \end{aligned}$$

σημ. $l=0$ αν $f(x_0) - Q(x_0) > 0$ ή $l=1$ αν $f(x_0) - Q(x_0) < 0$

$$\text{Επίσης, } \left| \frac{1}{2} (f(x_j) - P(x_j)) \right| \leq \frac{E_n(f)}{2} \text{ και } \left| \frac{1}{2} (f(x_j) - P_n^*(x_j)) \right| \leq \frac{E_n(f)}{2}$$

$$\text{Επειδή, } \left| \frac{1}{2} (f(x_j) - P(x_j)) + \frac{1}{2} (f(x_j) - P_n^*(x_j)) \right| \leq \left| \frac{1}{2} (f(x_j) - P(x_j)) \right| + \left| \frac{1}{2} (f(x_j) - P_n^*(x_j)) \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} E_n(f) + \frac{1}{2} E_n(f) = E_n(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_j) - P(x_j) = f(x_j) - P_n^*(x_j) \Rightarrow P(x_j) = P_n^*(x_j), \quad \forall j=0, 1, \dots, n+1$$

Τα πολυώνυμα $P \in P_n$ και $P_n^* \in P_n$ ταυτίζονται σε $n+2$ σημεία, επομένως $P \equiv P_n^* \pmod{\omega}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1) Να βρεθεί η βέλτση ως $f(x) = x^2$ στο $[-1, 1]$, στον P_1

ΛΥΣΗ

Έστω $P_1^*(x) = ax + b \in P_1$

Τότε $e(x) = f(x) - P_1^*(x) = x^2 - ax - b$ (συναρτησια σφάλμα)

$$e'(x) = 2x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \quad (\text{ακρότατο})$$

Τα άλλα δύο σημεία / ακρότατα είναι τα άκρα:

1 και -1. Τότε, το σωστό εναλ. σημείων θα

$$\text{είναι } -1 < \frac{a}{2} < 1$$

Έτσι, $e(-1) = e(\frac{a}{2}) = e(1)$ (αφού θέλουμε εναλλάσ. σωστό)

$$\Leftrightarrow 1 + a - b = -\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - b\right) = 1 - a - b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & (x=0 \text{ ακρότατο}) \\ 1 - b = b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } P_1^*(x) = \frac{1}{2} = P_0^*(x)$$

Διότι $\frac{1}{2} \in P_0^*(x)$

Άρα, το εναλ. σωστό είναι $\{-1, 0, 1\}$

2) Να βρεθεί η βέλτση ομοιόμορφη προσέγγιση της $f(x) = x^3$ στο $[-1, 1]$ στον P_2

ΛΥΣΗ

Έστω $P_2^*(x) = ax^2 + b$ τότε $e(x) = x^3 - ax^2 - b$

$$e'(x) = 3x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}} \in (-1, 1)$$

Τα εναλ. σωστά είναι τα:

$$\left\{-1, -\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right\} \text{ ή } \left\{-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}, 1\right\} \text{ ή } \left\{-1, -\sqrt{\frac{a}{3}}, 1\right\} \text{ ή } \left\{-1, \sqrt{\frac{a}{3}}, 1\right\}$$

Έστω ότι είναι το $\left\{-1, -\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right\}$ τότε από νόμο εναλλάσ.

$$\text{σημείων το } e(-1) = e\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = e\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + a - b = -\left(-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} + a\sqrt{\frac{a}{3}} - b\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}} - a\sqrt{\frac{a}{3}} - b$$

$$\Leftrightarrow -1 + \alpha - \beta = -\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\frac{9}{3}} + b = -\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\frac{9}{3}} - b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{9}{3}} + b = -\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{9}{3}} - b \Rightarrow b=0 \\ -2 + \alpha = -\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{9}{3}} \quad \mu\epsilon \quad \alpha = 3/4 \text{ προφανής} \end{cases}$$

(και άλλες είναι εντός του $[-1,1]$ απορρίπτονται)

Το συνολ. εντάλ. σημείων είναι:

$$\left\{ -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Αρα, το $P_4^*(x) = \frac{3}{4}x$
Εντάλ. σημείων $-x^2 - (x^2 - x + 1)x^2 = (x)^2 - (x)^2 - (x)^2 = (x)^2$

$$e(-1) = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \quad (\text{Μεγ. σφάλμα στο } -1)$$

$$e(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (1/2 \text{ και } 1/2 = 1/2)$$

$$e(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \quad (1/2 \text{ και } 1/2 = 1/2)$$

$$e(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad (1/2 \text{ και } 1/2 = 1/2)$$

Παρατηρείς ότι υπάρχει σωστό εντάλ. σημείων
2 no 4 σημεία για συν $e(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$, ερμηνεύς
το $P_4^*(x) = \frac{3}{4}x = P_2^*(x) \in P_2$

Μπορούμε να πούμε ότι είναι προσιτά (διαδοχικά)
τα εζής $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ και $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$
Διότι τα άλλα δύο $\{-1, -\frac{1}{2}, 1\}$ και $\{-1, \frac{1}{2}, 1\}$

Πρόβλημα Chebyshev: απορρίπτονται $[-1,1]$ από

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1]$$

$$T_n(x) = \cosh n \operatorname{arccosh} x, \quad x = \cosh \theta, \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Ετσι,

$$T_0(x) = \cos 0 = 1$$

$$T_1(x) = \cos \arccos x = x$$

(14)

$$\begin{aligned} \text{Επίσης, } \cos(n+1)\arccos x + \cos(n-1)\arccos x &= \\ &= 2\cos\left(\frac{n+1-(n-1)}{2}\right)\arccos x \cdot \cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\right)\arccos x = \end{aligned}$$

$$= 2x \cos n \arccos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x T_n(x) \Leftrightarrow \boxed{T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)}$$

Προσέχουμε τους όρους:

$$T_2(x) = 2x T_1(x) - T_0(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2x T_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

⋮

Τα πολυώνυμα chebyshev πέφτουν βαθμιαία
Είναι άρτια

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$$1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_n(x) T_m(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

Δηλαδή είναι ορθογώνια μεταξύ τους
ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$

$$2) \int_{-1}^1 (1-x^2) T_n^2(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

3) Το $T_n(x)$ έχει ένα εναλλάσσόμενο σωστό σημείο
στο $[-1, 1]$ αποτελούμενο από $n+1$ σημεία